DOI:10.16152/j.cnki.xdxbzr.2007.06.003
西北大学学报(自然科学版)
2007年12月,第37卷第6期,Dec.,2007,Vol.37,No.6
Journal of Northwest University (Natural Science Edition)

·数理科学与信息科学·

关于F.Smarandache函数及其k次补数

赵红星[1,2]

(1.西北工业大学 理学院,陕西 西安 710072;2.榆林学院 数学系,陕西 榆林 719000)

摘要:目的 研究著名的F.Smarandache函数S(n)以及n的k次补函数$a_k(n)$的复合函数的值分布问题。方法 利用初等方法及解析方法。结果 给出了复合函数$S(a_k(n))$与n的最大素因子函数P(n)的均方差定理。结论 获得了一个较强的渐近公式。

关 键 词:F.Smarandache函数;k次补数;均值分布定理。
中图分类号:O156.4 文献标识码:A 文章编号:1000-274X(2007)06-0948-04

对任意正整数n,著名的F.Smarandache函数[1] S(n)定义为最小的正整数m使得$n\mid m!$,即$S(n)=\min\{m: m\in N, n\mid m!\}$。从S(n)的定义容易推出,如果$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$表示n的标准分解式,那么$S(n)=\max_{1\leqslant i\leqslant r}\{S(p_i^{\alpha_i})\}$。由此,也不难计算出$S(1)=1$,$S(2)=2$,$S(3)=3$,$S(4)=4$,$S(5)=5$,$S(6)=3$,$S(7)=7$,$S(8)=4$,$S(9)=6$,$S(10)=5$,$S(11)=11$,$S(12)=4$,$S(13)=13$,$S(14)=7$,$S(15)=5$,$S(16)=6$,…。关于S(n)的算术性质,许多学者也进行了研究,获得了不少有趣的结果。例如Wang Yongxing研究了S(n)的均值性质[2],并证明了渐近公式:

$$\sum_{n\leqslant x}S(n)=\frac{\pi^2}{12}\frac{x^2}{\ln x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right)。$$

A.Ivić应用解析方法[3]证明了更一般的结论,亦即对任意给定的正整数r及k有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}S^r(n)=x^{r+1}\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{r+1}}{\ln^{k+1}x}\right)。$$

Lu Yaming研究了一类包含S(n)方程的可解性[4],证明了该方程有无穷多组正整数解,即证明了对任意正整数$k\geqslant 2$,方程

$$S(m_1+m_2+\cdots+m_k)=S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k)$$

有无穷多组正整数解$(m_1,m_2,\cdots,m_k)$。

Jozsef Sandor进一步证明[5]对任意正整数$k\geqslant 2$,存在无穷多组正整数$(m_1,m_2,\cdots,m_k)$,满足不等式

$$S(m_1+m_2+\cdots+m_k)>S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k);$$

同时,又存在无穷多组正整数$(m_1,m_2,\cdots,m_k)$,满足不等式

$$S(m_1+m_2+\cdots+m_k)<S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k)。$$

此外,徐哲峰获得了有关S(n)的一个深刻结果[6],即证明了渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}(S(n)-P(n))^2=\frac{2\zeta(\frac{3}{2})x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right)。$$

其中P(n)表示n的最大素因子,ζ(s)表示Riemann Zeta函数。

本文作为文献[6]的注释,获得了一个类似的结果。为叙述方便,先引入k次补的定义:设$k\geqslant 2$为任意给定的整数,则n的k次补数$a_k(n)$定义为最小的正整数m,使得乘积$m\cdot n$为完全k次方幂。有关这一函数的研究工作也不少[7-9],本文借助于文献[6]的思想主要研究了复合函数$S(a_k(n))$的值分布问题,证明了下面的定理。

定理1 设$k\geqslant 2$是一个给定的整数。那么对任意实数$x\geqslant 3$,有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}(S(a_k(n))-(k-1)P(n))^2=$$

收稿日期:2006-11-11
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10671155)
作者简介:赵红星(1961—),男,陕西榆林人,西北工业大学博士生,榆林学院教授,从事计算几何研究。

$$\frac{2\zeta(\frac{3}{2})}{3}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right)+O\left(\frac{k^2 x^{\frac{4}{3}}}{\ln x}\right)。$$

其中 $\zeta(s)$ 表示 Riemann Zeta函数。

定理 2　对任意实数 $x\geqslant 3$ 有

$$\sum_{n\leqslant x}(SM(a_k(n))-(k-1)P(n))^2=$$

$$\frac{2\zeta(\frac{3}{2})}{3}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right)+O\left(\frac{k^2 x^{\frac{4}{3}}}{\ln x}\right)。$$

其中函数 $SM(n)$ 定义为 $SM(1)=1$，当 $n>1$ 且 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 为 n 的标准分解式时定义 $SM(n)=\max_{1\leqslant i\leqslant r}\{\alpha_i p_i\}$。

1　几个引理

为了完成定理的证明，需要下面几个引理。

引理 1　设 $k\geqslant 2$ 是一个给定的整数。那么对任意充分大的正整数 n 有

(i) 如果 $P(n)>\sqrt{n}$，那么 $S(a_k(n))=SM(a_k(n))=(k-1)P(n)$；

(ii) 如果 $n=mp_1P(n)$，且 $n^{\frac{1}{3}}<p_1<P(n)\leqslant\sqrt{n}$，那么

$$S(a_k(n))=SM(a_k(n))=(k-1)P(n)；$$

(iii) 如果 $n=mP^2(n)$，且 $n^{\frac{1}{3}}<P(n)\leqslant\sqrt{n}$，那么当 $k>2$ 时，有

$$S(a_k(n))=SM(a_k(n))=(k-2)P(n)；$$

当 $k=2$ 时，

$$S(a_k(n))=SM(a_k(n))\leqslant kn^{\frac{1}{3}}。$$

证　明　只证明对 $S(a_k(n))$ 的结论。类似的，可以推出所有结果适用于 $SM(a_k(n))$。现在证明 (i)。设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 表示 n 的标准分解式，由于 $P(n)>\sqrt{n}$，所以 $P(n)=p_r$，$\alpha_r=1$。因此，$S(a_k(P(n)))=S(P^{k-1}(n))=(k-1)P(n)$，而 $S(a_k(p_i^{\alpha_i}))\leqslant S(p_i^{k-1})\leqslant(k-1)p_i\leqslant(k-1)P(n)$，$i=1,2,\cdots,r$，所以 $S(a_k(n))=(k-1)P(n)$。即证明了引理 1的 (i) 式。

现在证明引理 1的 (ii) 式。事实上，由于 m 的任意素因子 p 都满足 $p<n^{\frac{1}{3}}$。而当 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 为 n 的标准分解式时，显然 $a_k(n)=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_r^{\beta_r}$ 满足 $\beta_i\leqslant k-1$，$i=1,2,\cdots,r$。于是，由 $n^{\frac{1}{3}}<p_1<P(n)\leqslant\sqrt{n}$ 立刻推出 $S(a_k(n))=(k-1)P(n)$。即为引理 1的 (ii) 式。

当 $n=mP^2(n)$ 且 $n^{\frac{1}{3}}<P(n)\leqslant\sqrt{n}$ 时，由于这时 $m<P(n)$，所以当 $k>2$ 时，$S(a_k(P^2(n)))=S(P^{k-2}(n))=(k-2)P(n)$，从而 $S(a_k(n))=(k-2)P(n)$。

当 $k=2$ 时，显然 $a_k(P^2(n))=1$，m 的其他素因子不大于 $n^{\frac{1}{3}}$，故 $S(a_k(n))\leqslant S(P^{k-1}(m))\leqslant kn^{\frac{1}{3}}$。于是，完成了引理 1的证明。

引理 2　设 $k\geqslant 2$ 为给定的整数。那么对任意实数 $x\geqslant 3$ 有估计式

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P(n)\leqslant n^{\frac{1}{3}}}}(S(a_k(n))-(k-1)P(n))^2\ll k^2\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\ln x}$$

及

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P(n)\leqslant n^{\frac{1}{3}}}}(SM(a_k(n))-(k-1)P(n))^2\ll k^2\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\ln x}$$

证　明　设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 为 n 的标准分解式。$a_k(n)=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_r^{\beta_r}$，则 $S(a_k(n))=\max_{1\leqslant i\leqslant r}\{S(p_i^{\beta_i})\}$。令 $\beta p=\max_{1\leqslant i\leqslant r}\{\beta_i p_i\}$，于是有 $S(a_k(n))\leqslant\beta p\leqslant kp$。注意当 $P(n)$ 在 n 的标准分解式中的方幂为 1 时，$\beta=k-1$，此时有 $S(a_k(n))-(k-1)P(n)=0$，所以有

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P(n)\leqslant n^{\frac{1}{3}}}}(S(a_k(n))-(k-1)P(n))^2\ll\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P(n)\leqslant n^{\frac{1}{3}},\ P^2(n)\mid n}}k^2P^2(n)\ll$$

$$\sum_{\substack{np^2\leqslant x\\ p\leqslant x^{\frac{1}{3}}}}k^2p^2\ll\sum_{p\leqslant x^{\frac{1}{3}}}p^2\sum_{n\leqslant\frac{x}{p^2}}k^2\ll k^2\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\ln x}$$

同理可推出另一个估计式。于是完成了引理 2的证明。

引理 3　设 p 为素数，m 为正整数，则有估计式

$$\sum_{m\leqslant p\leqslant\sqrt{\frac{x}{m}}}p^2=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3m^{\frac{3}{2}}(\ln x-\ln m)}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{3}{2}}\left(\ln^2\sqrt{\frac{x}{m}}\right)}\right)。$$

证　明　参阅文献[6]中引理 3的证明。

2　定理的证明

显然，只需要证明定理 1，类似可推出定理 2。由引理 1知当 $P(n)>\sqrt{n}$ 时，$S(a_k(n))=SM(a_k(n))=(k-1)P(n)$。因此，结合引理 1及引理 2，有

$$\sum_{n\leqslant x}(S(a_k(n))-(k-1)P(n))^2=$$

$$\sum_{\substack{n\le x\\P(n)>\sqrt{n}}}(S(a_k(n))-(k-1)P(n))^2+$$
$$\sum_{\substack{n\le x\\P(n)\le\sqrt{n}}}(S(a_k(n))-(k-1)P(n))^2=$$
$$\sum_{\substack{n\le x\\P(n)\le\sqrt{n}}}(S(a_k(n))-(k-1)P(n))^2=$$
$$\sum_{\substack{n\le x\\P(n)\le n^{\frac13}}}(S(a_k(n))-(k-1)P(n))^2+$$
$$\sum_{\substack{n\le x\\n^{\frac13}<P(n)\le\sqrt{n}}}(S(a_k(n))-(k-1)P(n))^2=$$
$$\sum_{\substack{n\le x\\n^{\frac13}<P(n)\le\sqrt{n}}}(S(a_k(n))-(k-1)P(n))^2+$$
$$O\left(\frac{k^2x^{\frac43}}{\ln x}\right)。\qquad(1)$$

注意，当 n 满足 $n^{\frac13}<P(n)\le\sqrt{n}$ 时，可分为以下3种情况：

(a) $n=m\cdot P^2(n)$ 且 $m<P(n)$;

(b) $n=m\cdot p_1\cdot P(n)$ 且 $m<n^{\frac13}<p_1<P(n)$;

(c) $n=m\cdot P(n)$ 且 $P(m)\le n^{\frac13}$。

对于情形(b)和(c)中的 n，显然这些 n 满足 $S(a_k(n))=(k-1)P(n)$，于是这种 n 在式(1)中产生的和式为0，而对于情形(a)中的 n，当 $k>2$ 时有 $S(a_k(n))=(k-2)P(n)$。于是由式(1)，有

$$\sum_{\substack{n\le x\\n^{\frac13}<P(n)\le\sqrt{n}}}(S(a_k(n))-(k-1)P(n))^2=$$
$$\sum_{\substack{mp^2\le x\\(mp^2)^{\frac13}<p\le\sqrt{mp^2}}}(S(p^{k-2})-(k-1)p)^2=$$
$$\sum_{mp^2\le x}p^2=\sum_{m<x^{\frac13}}\sum_{m^2<p^2\le\frac{x}{m}}p^2。\qquad(2)$$

对于情形(a)中的 n，当 $k=2$ 时，有 $S(a_k(n))\le k^2P(m)\le k^2\cdot n^{\frac13}$，此时仍然有

$$\sum_{\substack{n\le x\\n^{\frac13}<P(n)\le\sqrt{n}}}(S(a_2(n))-P(n))^2=$$
$$\sum_{\substack{mp^2\le x\\(mp^2)^{\frac13}<p\le\sqrt{mp^2}}}(S^2(a_2(n))-$$
$$2pS(a_2(n))+p^2)=\sum_{mp^2\le x}p^2+$$
$$O\left(\sum_{\substack{mp^2\le x\\(mp^2)^{\frac13}<p\le\sqrt{mp^2}}}((mp^2)^{\frac23}+(mp^2)^{\frac13}p)\right)=$$
$$\sum_{m<x^{\frac13}}\sum_{m^2<p^2\le\frac{x}{m}}p^2+O(x^{\frac43})。\qquad(3)$$

结合式(2)，(3)及引理3并注意 $x^{\frac43}\ll\frac{x^{\frac32}}{\ln^2 x}$，知当 $k\ge2$ 时，有

$$\sum_{\substack{n\le x\\n^{\frac13}<P(n)\le\sqrt{n}}}(S(a_k(n))-(k-1)P(n))^2=$$
$$\sum_{m\le x^{\frac13}}\sum_{m^2p^2\le\frac{x}{m}}p^2+O(x^{\frac43})=$$
$$\sum_{m\le x^{\frac13}}\left(\frac{2x^{\frac32}}{3m^{\frac32}(\ln x-\ln m)}+O\left(\frac{x^{\frac32}}{m^{\frac32}\left(\ln^2\sqrt{\frac{x}{m}}\right)}\right)\right)=$$
$$\frac{2x^{\frac32}}{3\ln x}\sum_{m\le e^{\sqrt{\ln x}}}\frac{1}{m^{\frac32}}+O\left(\sum_{e^{\sqrt{\ln x}}\le m\le x^{\frac13}}\frac{x^{\frac32}}{m^{\frac32}\ln x}\right)+$$
$$O\left(\frac{x^{\frac32}}{\ln^2 x}\right)=$$
$$\frac23\cdot\zeta\left(\frac32\right)\cdot\frac{x^{\frac32}}{\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac32}}{\ln^2 x}\right)。\qquad(4)$$

由式(1)及式(4)，立刻得到渐近公式

$$\sum_{n\le x}(S(a_k(n))-(k-1)P(n))^2=$$
$$\frac23\cdot\zeta\left(\frac32\right)\cdot\frac{x^{\frac32}}{\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac32}}{\ln^2 x}\right)+O\left(\frac{k^2x^{\frac43}}{\ln x}\right)。$$

于是，完成了定理的证明。

参考文献：

[1] SMARANDACHE F. Only Problems, Not Solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] WANG Yong-xing. On the Smarandache Function, Research on Smarandache Problem in Number Theory[M]. Phoenix: Hexis, 2005, 2: 103-106.

[3] IVIC A. On a problem of Erdős involving the largest prime factor of n[J]. Monatsh Math, 2005, 145: 35-46.

[4] LU Yaming. On the solutions of an equation involving the Smarandache function[J]. Scientia Magna, 2006, 2(1): 76-79.

[5] SANDOR J S. On certain inequalities involving the Smarandache function[J]. Scientia Magna, 2006, 2(3): 78-80.

[6] XU Zhe-feng. On the value distribution of the Smarandache function[J]. Acta Mathematica Sinica (in Chinese), 2006, 49(5): 1 009-1 012.

[7] TABIRCA S. About S-multiplicative functions[J]. Octogon, 1999, 7: 169-170.

[8] APOSTOL T M. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

[9] ERDÖS P. Problem 6674[J]. Amer Math Monthly, 1991, 98: 965-969.

(编　辑　亢小玉)

On the F. Smarandache function and the k-power complements

ZHAO Hong-xing[1,2]

(1. School of Science, Northwestern Polytechnical University, Xi′an 710072, China; 2. Department of Mathematics, Yulin College, Yulin 719000, China)

Abstract: Aim　To study the value distribution problem of a composite function $S(a_k(n))$ of the famous F. Smarandache function $S(n)$ and the k-power complement function $a_k(n)$. Methods　Using the elementary and analytic methods. Results　A mean square error theorem is given for $S(a_k(n))$ and the largest prime factor $P(n)$ of n. Conclusion　A sharper asymptotic formula is established.

Key words: F. Smarandache function; k-power complements; value distribution theorem

·学术动态·

姚远编审被评为陕西省首届科技期刊十佳主编

由陕西省出版物审读中心组织的陕西省首届科技期刊十佳主编、优秀编辑评选活动于 10月 23日揭晓。本刊姚远编审被评为陕西省首届科技期刊十佳主编，陈镱文编辑被评为优秀编辑。这次共评选出十佳主编 7人，优秀主编 5人，优秀编辑 28名，优秀编务 12名。10月 1日至 20日首先在《今传媒》网站公示，在充分征求各方意见后予以正式公布。12月 11日，在西安召开了表彰大会。

姚远编审自 1980年调入学报编辑部，独自一人开始主持《西北大学学报》(自然科学版)的编辑出版工作，至今已整整 27年。从内部发行到公开发行，从季刊到双月刊，从铅排到计算机排版，从一份名不见经传的地方大学学报到中国高校精品科技期刊。《西北大学学报》(自然科学版)被确认为我国创办最早的大学学报之一，亦为中国综合性科学技术类核心期刊、科技部中国科技信息研究所选定的统计源刊、中国科学院中国科学引文核心数据库源刊和中国被引频次最高的 500种科技期刊之一，也是美、俄、德等国及我国 20余种文摘期刊、数据库固定摘转或收录的主要刊源。1999年，2000年，中国科技信息研究所和中国科学院文献情报中心统计的期刊影响因子，位居全国综合性大学学报第一名和全国综合性科技期刊第 4名。2003年时，学报被引频次仅 261次，2007年的最新统计已达到 1 020次，影响因子达到 0.591，居全国综合性大学自然科学学报第 7名。仅清华大学中国知网公布的最新网络统计数据显示：截止 2007年 3月，《西北大学学报》(自然科学版)2006至 2007年文献在亚洲、欧洲、北美洲、非洲、大洋洲的访问量达 17万余次，下载频次达 78 800余次。姚远编审在主持理科学报工作期间，于 1992年，获中共中央宣部、国家科委、国家新闻出版署颁发的全国首届优秀期刊三等奖和陕西省优秀科技期刊；1995年，获国家教委科技司授予的全国重点高校优秀学报一等奖；1997年，在第二届全国优秀期刊评比中，由中共中央宣传部、国家科委、新闻出版署评为全国优秀科技期刊三等奖；作为第一完成人，于 1999年获国家教育部颁发的全国优秀学报一等奖，同时获陕西省高校学报一等奖和十佳学报称号。2000年被国家新闻出版总署和国家科技部列入“中国期刊方阵”(双效期刊)。2006年 10月 20日被教育部科技司评为首届中国高校精品科技期刊(第一完成人)。

(亢小玉)